بكالوريا :دورة جوان 2013

الموضوع الأول

التمرين الأول :

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ النقط $A\left(-1;1;3\right)$
، $B\left(1;0;-1\right)$ ، $C\left(2;-1;1\right)$ ، $D\left(2;0;-1\right)$ و المستوي $\left(p\right)$ ذا المعادلة: $2y+z+1=0$.

ليكن $\left(\Delta\right)$ المستقيم الذي تمثيل وسيطي له: $\begin{cases}x=-1\\y=2+\beta\\z=1-2\beta\end{cases}$ حيث β وسيط حقيقي .

1) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم $\left(BC\right)$ ، ثم تحقق أن المستقيم $\left(BC\right)$ محتوى في المستوي $\left(p\right)$.

2) بين أن المستقيمين $\left(\Delta\right)$ و $\left(BC\right)$ ليسا من نفس المستوي .

3) أ – احسب المسافة بين النقطة A و المستوي $\left(p\right)$.

ب – بين أن D نقطة من $\left(p\right)$ وأن المثلث BCD قائم .

جـ – بين أن $ABCD$ رباعي وجوه ، ثم احسب حجمه.

التمرين الثاني :

I) المتتالية $\left(v_n\right)$ معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=\dfrac{5^{n+1}}{6^n}$

1) بين أن $\left(v_n\right)$ متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها و حدها الأول.

2) احسب $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} v_n$

II) المتتالية $\left(u_n\right)$ معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0=1$ و من أجل كل عدد طبيعي n :
$u_{n+1}=\sqrt{5u_n+6}$.

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1\le u_n\le 6$.

2) ادرس اتجاه تغير المتتالية $\left(u_n\right)$.

3) أ) برهن أنه ،من أجل كل عدد طبيعي n : $6-u_{n+1}\le\dfrac{5}{6}\left(6-u_n\right)$.

ب) برهن أنه ،من أجل كل عدد طبيعي n : $0\le 6-u_n\le v_n$ ثم استنتج $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n$.

التمرين الثالث :

1 . حل في $\mathbb{C}$ مجموعة الأعداد المركبة المعادلة (I) ذات المجهول z التالية :

$z^2-(4\cos\alpha)z+4=0..........(I)$ حيث α وسيط حقيقي.

2 . من أجل $\alpha=\frac{\pi}{3}$ ، نرمز إلى حلي المعادلة (I) بـ z_1 و z_2 . بين أن : $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2013}=1$.

3 . نعتبر في المستوي المركب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقط A ، B و C التي لاحقاتها $z_A=1+i\sqrt{3}$ و $z_B=1-i\sqrt{3}$ و $z_C=4+i\sqrt{3}$ على الترتيب.

أ) أنشئ النقط A ، B و C .

ب) اكتب على الشكل الجبري العدد المركب $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ ثم استنتج أن C هي صورة B بالتشابه المباشر S الذي مركزه A و يطلب تعيين نسبته و زاويته.

جـ) عين لاحقة النقطة G مرجح الجملة $\{(A;1),(B;-1),(C;2)\}$ ، ثم أنشئ G .

د) احسب z_D لاحقة النقطة D ، بحيث يكون الرباعي $ABDG$ متوازي أضلاع.

التمرين الرابع :

x	$f(x)$
0,20	0,037
0,21	0,016
0,22	-0,005
0,23	-0,026
0,24	-0,048
0,25	-0,070

I) f الدالة المعرفة على $]-\infty;1[$ بـ : $f(x)=\frac{x}{x-1}+e^{\frac{1}{x-1}}$

و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1 . احسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x)$ ، ثم استنتج المستقيمين المقاربين للمنحنى (C) .

2 . احسب $f'(x)$. بين أن الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;1[$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.

3 . بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل في $]-\infty;1[$ حلا وحيدا α . باستعمال جدول القيم أعلاه جد حصرا للعدد α .

4 . ارسم المستقيمين المقاربين والمنحنى (C) ، ثم ارسم المنحنى (C') الممثل للدالة $|f|$.

5 . عين بيانيا مجموعة قيم الأعداد الحقيقية m التي من اجلها يكون للمعادلة $|f(x)|=m$ حلان مختلفان في الإشارة.

II) g الدالة المعرفة على $]-\infty;1[$ بـ : $g(x)=f(2x-1)$. (عبارة $g(x)$ غير مطلوبة)

1 . ادرس تغيرات الدالة g على $]-\infty;1[$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.

2 . ا) تحقق من أن : $g\left(\dfrac{\alpha+1}{2}\right)$ ، ثم بين أن: $g'\left(\dfrac{\alpha+1}{2}\right)=2f'(\alpha)$.

ب) استنتج معادلة (T) المماس لمنحنى الدالة g في النقطة ذات الفاصلة $\dfrac{\alpha+1}{2}$.

ج) تحقق من أن: $y=\dfrac{2}{(\alpha-1)^3}x-\dfrac{\alpha+1}{(\alpha-1)^3}$ معادلة للمستقيم (T).

الموضوع الثاني

التمرين الأول :

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة (E) ذات المجهول z الآتية:

$$z^2+4z+13=0 ....(E)$$

1 . تحقق أن العدد $-2-3i$ هو حل للمعادلة (E) ،ثم جد الحل الآخر.

2 . A و B نقطتان من المستوي المركب لاحقتاهما على الترتيب : $z_A=-2-3i$ ، $z_B=i$.

S التشابه المباشر الذي مركزه A ، نسبته $\frac{1}{2}$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$ و الذي يحول كل نقطة $M(z)$ من المستوي إلى النقطة $M'(z')$.

أ – بين أن: $z'=\frac{1}{2}iz-\frac{7}{2}-2i$.

ب – احسب z_C لاحقة النقطة C ، علما أن C هي صورة B بالتشابه S .

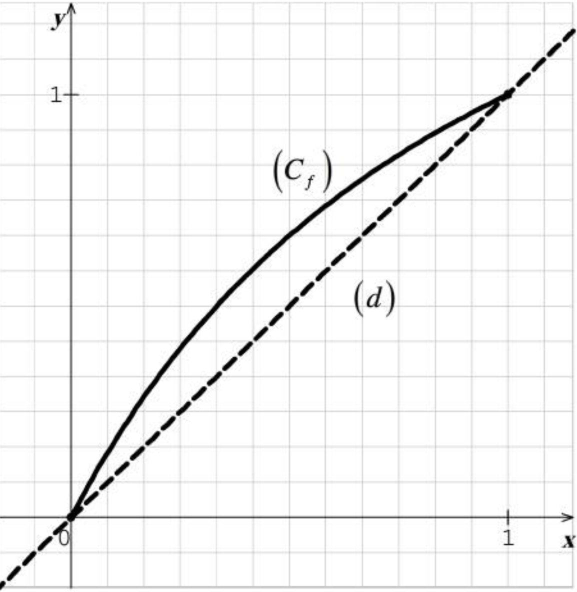
3 . لتكن النقطة D ، حيث: $2\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

أ – بين أن D هي مرجح النقطتين A و B المرفقتين بمعاملين حقيقيين يطلب تعيينهما .

ب – احسب z_D لاحقة النقطة D .

جـ- بين أن: $\frac{z_D-z_A}{z_C-z_A}=i$ ثم استنتج طبيعة المثلث ACD .

التمرين الثاني :



في الشكل المقابل، (C_f) هو التمثيل البياني للدالة f المعرفة على المجال $[0;1]$ بالعلاقة:

$f(x)=\frac{2x}{x+1}$ ، و (d) المستقيم ذو المعادلة $y=x$.

1 . (u_n) المتتالية العددية المعرفة بحدها الأول: $u_0=\frac{1}{2}$

و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=f(u_n)$.

أ) اعد رسم هذا الشكل على ورقة الإجابة، ثم مثل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 على محور الفواصل دون حسابها ، مبرزا خطوط التمثيل.

ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها.

2 . أ) أثبت أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;1]$.

ب) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 1$.

جـ) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n).

3. (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n}$.

أ – بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ، يطلب حساب حدها الأول v_0.

ب – احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

التمرين الثالث :

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نعتبر النقط :

$A(2;1;-1)$ ، $B(1;-1;3)$ ، $C\left(-\frac{3}{2};-2;1\right)$ و $D\left(\frac{7}{2};-3;0\right)$.

ولتكن I منتصف $[AB]$

1. أ) احسب احداثيات النقطة I .

ب) بين أن : $2x+4y-8z+5=0$ معادلة ديكارتية لـ (P) ،المستوي المحوري لـ $[AB]$.

2. اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة C و $\vec{u}(1;2;-4)$ شعاع توجيه له.

3. أ) جد احداثيات E نقطة تقاطع المستوي (P) و المستقيم (Δ).

ب) بين أن (Δ) و (AB) من نفس المستوي ، ثم استنتج أن المثلث IEC قائم.

4. أ) بين أن المستقيم (ID) عمودي على كل من المستقيم (AB) و المستقيم (IE).

ب) احسب حجم رباعي الوجوه $DIEC$.

التمرين الرابع :

I) g الدالة المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $g(x) = x^2 + 2x + 4 - 2\ln(x+1)$.

1. ادرس تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها .

2 . استنتج أنه من أجل كل x من المجال $]-1;+\infty[$ ، $g(x) > 0$.

II) f الدالة المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $f(x) = x - \frac{1-2\ln(x+1)}{x+1}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

(وحدة الطول $2cm$)

1 . أ) احسب $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} f(x)$. فسر النتيجة بيانيا

ب) احسب $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

2 . أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1;+\infty[$ فإن: $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(x+1)^2}$.

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $]-1;+\infty[$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.

جـ) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-1;+\infty[$ ، ثم تحقق أن $0 < \alpha < 0,5$.

3. أ) بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

ب) أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (Δ).

4. نقبل أن المستقيم (T) ذا المعادلة: $y = x + \dfrac{2}{\sqrt{e^3}}$ مماس للمنحنى (C_f) في نقطة فاصلتها x_0 .

أ) احسب x_0 .

ب) ارسم المستقيمين المقاربين و المماس (T) ثم المنحنى (C_f) .

ج) عين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m بحيث المعادلة $f(x) = x + m$ تقبل حلين متمايزين.

حل بكالوريا :دورة جوان 2013

حل الموضوع الأول

التمرين الأول :

1) $\overrightarrow{BC}(1;-1;2)$ شعاع توجيه للمستقيم (BC) و $B\in(BC)$ ومنه:

$$(BC):\begin{cases}x=1+t\\ y=-t\\ z=-1+2t\end{cases},t\in\mathbb{R}$$

ـ التحقق أن المستقيم (BC) محتوى في المستوي (p) :

دراسة التقاطع بين (BC) و (p): $(BC)\cap(P):\begin{cases}x=1+t\\ y=-t\\ z=-1+2t\\ 2y+z+1=0\end{cases}$

او يمكن التحقق بتعويض احداثيات B ، C في معادلة (P) .

2) $\overrightarrow{BC}(1;-1;2)$ و $\vec{u}(0;1;-2)$ شعاع توجيه (Δ) غير مرتبطين خطيا لأن $\frac{1}{-1}\neq\frac{0}{1}$

ومنه (BC) و (Δ) إما متقاطعان وفق نقطة أو ليسا من نفس المستوي.

دراسة التقاطع بين (BC) و (Δ): $(BC)\cap(\Delta):\begin{cases}-1=1+t\\ 2+\beta=-t\\ 1-2\beta=-1+2t\end{cases}$ ، نجد: $\begin{cases}t=-2\\ \beta=0\end{cases}$

بالتعويض : $t=-2$ نجد $H_t(-1;2;-5)$ ، ومن أجل $\beta=0$ نجد $H_\beta(-1;2;1)$

بما أن $H_t\neq H_\beta$ فإن $(BC)\cap(\Delta)=\varnothing$ ومنه (BC) و (Δ) ليسا من نفس المستوي.

3) أ–حساب المسافة بين النقطة A و المستوي (p) :

$$d(A;(P))=\frac{|2(1)+3+1|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{6}{\sqrt{5}}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$$

ب– بتعويض احداثيات D في معادلة (p) نجد: $2(0)+(-1)+1=-1+1=0$ ومنه:

D نقطة من (p).

اثبات أن المثلث BCD قائم :

لدينا: $\overrightarrow{BC}\left(1;-1;2\right)$ ، $\overrightarrow{BD}\left(1;0;0\right)$ ، $\overrightarrow{DC}\left(0;-1;2\right)$ ومنه:

$\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{DC}=\left(1\right)\times\left(0\right)+\left(0\right)\times\left(-1\right)+\left(0\right)\times\left(2\right)=0$ ، ومنه $\overrightarrow{BC}\perp\overrightarrow{DC}$.

إذن المثلث BCD قائم في D . ويمكن استعمال مبرهنة فيثاغورث.

جـ – اثبات أن $ABCD$ رباعي وجوه :

لدينا: $\begin{cases}\left(BC\right)\subset\left(P\right)\\ D\in\left(P\right)\end{cases}$ ومنه B ، C ، D من نفس المستوي $\left(p\right)$ وليست في استقامية لانها

تشكل مثلثا ، ومن جهة $d\left(A;\left(P\right)\right)=\dfrac{6\sqrt{5}}{5}\neq 0$ ، أي $A\notin\left(P\right)$.

إذن $ABCD$ رباعي وجوه.

$$V_{ABCD}=\frac{1}{3}\times S_{BCD}\times h=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times BD\times DC\right)\times d\left(A;\left(P\right)\right)$$

$$=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times 1\times\sqrt{5}\right)\times\frac{6}{\sqrt{5}}=1$$

إذن: $V_{ABCD}=1\ uv$.

التمرين الثاني :

$v_n=\dfrac{5^{n+1}}{6^n}$ (I

1) $\left(v_n\right)$ متتالية هندسية:

$v_{n+1}=\dfrac{5^{n+2}}{6^{n+1}}=\dfrac{5}{6}\times\left(\dfrac{5^{n+1}}{6^n}\right)=\dfrac{5}{6}v_n$. ومنه $\left(v_n\right)$ متتالية هندسية أساسها $\dfrac{5}{6}$ وحدها

الأول 5 $v_0=\dfrac{5^{0+1}}{6^0}=5$ ، $v_0=5$.

2) $\lim\limits_{n\mapsto+\infty}v_n=0$ لأن $0<q<1$

$u_0=1$ (II ،

$u_{n+1}=\sqrt{5u_n+6}$.

1) اثبات بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1\le u_n\le 6$.

نضع: $p(n)$ ، من أجل كل عدد طبيعي n : $1\le u_n\le 6$.

* المرحلة 1: من أجل $n=0$ لدينا $P\left(0\right)$: $1\le u_0\le 6$ ، أي: $1\le 1\le 6$ محققة.

* المرحلة 2: نفرض صحة $p(n)$ أي : $1\le u_n\le 6$ ونبرهن صحة $p\left(n+1\right)$ أي :

$1 \le u_{n+1} \le 6$.

لدينا : $1 \le u_n \le 6$ ومنه $5 \le 5u_n \le 30$ ومنه $11 \le 5u_n + 6 \le 36$ ومنه :

$11 \le 5u_n + 6 \le 36$ أي: $1 \le \sqrt{11} \le \sqrt{5u_n + 6} \le \sqrt{36}$ ، أي $1 \le u_{n+1} \le 6$.

* الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي n : $1 \le u_n \le 6$.

2) اتجاه تغير المتتالية (u_n) :

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{5u_n + 6} - u_n = \left[\sqrt{5u_n + 6} - u_n\right] \times \frac{\sqrt{5u_n + 6} + u_n}{\sqrt{5u_n + 6} + u_n}$$

$$= \frac{-u_n^2 + 5u_n + 6}{\sqrt{5u_n + 6} + u_n} = \frac{-(u_n + 1)(u_n - 6)}{\sqrt{5u_n + 6} + u_n}$$

اشارة $u_{n+1} - u_n$ من إشارة $-(u_n + 1)(u_n - 6)$ ، ولكون $1 \le u_n \le 6$ نستنتج أن:

$-(u_n + 1)(u_n - 6) \ge 0$ ومنه (u_n) متزايدة تماما على المجال $[1;6]$.

3) أ) اثبات أن ،من أجل كل عدد طبيعي n : $6 - u_{n+1} \le \frac{5}{6}(6 - u_n)$.

لدينا $6 - u_{n+1} \le 6 - \sqrt{5u_n + 6}$ ، ومنه: $6 - u_{n+1} \le \left(6 - \sqrt{5u_n + 6}\right) \times \frac{6 + \sqrt{5u_n + 6}}{6 + \sqrt{5u_n + 6}}$

أي: $6 - u_{n+1} \le \frac{30 - 5u_n}{6 + \sqrt{5u_n + 6}}$ ، أي: $6 - u_{n+1} \le \frac{5(6 - u_n)}{6 + \sqrt{5u_n + 6}}$

ومن جهة لدينا: $\frac{1}{6 + \sqrt{5u_n + 6}} \le \frac{1}{6}$ ومنه: $\frac{5(6 - u_n)}{6 + \sqrt{5u_n + 6}} \le \frac{5}{6}(6 - u_n)$ ،

ومنه: $6 - u_{n+1} \le \frac{5}{6}(6 - u_n)$.

ب) اثبات أنه ،من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \le 6 - u_n \le v_n$

لدينا: $6 - u_{n+1} \le \frac{5}{6}(6 - u_n)$ ، أي:

$$\begin{cases} 0 \le 6 - u_1 \le \frac{5}{6}(6 - u_0) \\ 0 \le 6 - u_2 \le \frac{5}{6}(6 - u_1) \\ 0 \le 6 - u_3 \le \frac{5}{6}(6 - u_2) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 0 \le 6 - u_n \le \frac{5}{6}(6 - u_{n-1}) \end{cases}$$

بضرب أطراف المتباينات و بعد الاختزال نجد: $0 \le 6 - u_{n+1} \le \left(\frac{5}{6}\right)^n (6 - u_0)$، أي

$0 \le 6 - u_{n+1} \le \left(\frac{5}{6}\right)^n \times 5$ ، أي $0 \le 6 - u_{n+1} \le \frac{5^{n+1}}{6^n}$ **وبالتالي** $0 \le 6 - u_{n+1} \le v_n$

استنتاج $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} u_n$:

لدينا: $0 \le 6 - u_{n+1} \le v_n$ ، **وبما أن:** $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} v_n = 0$ **فإن:** $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} (6 - u_{n+1}) = 0$

ومنه: $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} u_{n+1} = 0$ ، **أي:** $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} u_n = 0$.

التمرين الثالث :

1. $\Delta = (-4\cos\alpha)^2 - 4(1)(4) = 16(\cos^2\alpha - 1) = -16\sin^2\alpha < 0$

لدينا: $\Delta = (i\sin\alpha)^2$ ، **ومنه:** $z_0 = \frac{4\cos\alpha + 4i\sin\alpha}{2} = 2\cos\alpha + 2i\sin\alpha$

و $z_1 = \overline{z_0} = 2\cos\alpha - 2i\sin\alpha$.

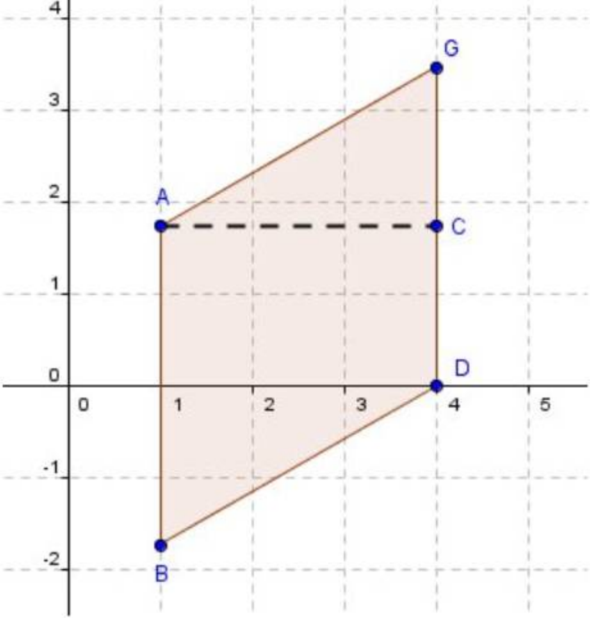
2. من أجل $\alpha = \frac{\pi}{3}$ ، نجد:

$z_1 = 2\cos\frac{\pi}{3} + 2i\sin\frac{\pi}{3} = 1 + i\sqrt{3}$ و $z_2 = 2\cos\frac{\pi}{3} - 2i\sin\frac{\pi}{3} = 1 - i\sqrt{3}$.

اثبات أن : $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2013} = 1$

لدينا: $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2013} = \left(\frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{2e^{i\frac{\pi}{3}}}\right)^{2013} = \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^{2013} = e^{i(1342\pi)} = e^{i(2\pi)} = 1$

3. أ) انشاء النقط A ، B و C :



ب) لدينا: $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{\left(4+i\sqrt{3}\right)-\left(1+i\sqrt{3}\right)}{\left(1-i\sqrt{3}\right)-\left(1+i\sqrt{3}\right)} = \frac{3}{-2i\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}i$

بما أن: $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{\sqrt{3}}{2}i$ فإن $z_C - z_A = \frac{\sqrt{3}}{2}i\left(z_B - z_A\right)$ ، وهي من كتابة مختصرة لتشابه مباشر مركزه A ونسبته $\frac{\sqrt{3}}{2}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

جـ) G مرجح الجملة $\left\{(A;1),(B;-1),(C;2)\right\}$ ، ومنه

$$z_G = \frac{z_A - z_B + 2z_C}{2} = 4 + 2i\sqrt{3}$$

د) $ABDG$ متوازي أضلاع معناه: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{GD}$ ، ومنه $z_B - z_A = z_D - z_G$

ومنه: $z_D = z_B - z_A + z_G$ ، بالحساب نجد $z_D = 4$.

التمرين الرابع :

I) f الدالة المعرفة على $]-\infty;1[$ بـ: $f(x) = \frac{x}{x-1} + e^{\frac{1}{x-1}}$

1. لدينا :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{x}{x-1} + e^{\frac{1}{x-1}}\right] = 2$ و $\lim\limits_{\substack{x\to1\\<}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to1\\<}}\left[\frac{x}{x-1} + e^{\frac{1}{x-1}}\right] = -\infty$ ،

المستقيمين المقاربين للمنحنى (C) معادلتيهما $x=1$ و $y=2$.

2 . الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]-\infty;1[$ ولدينا :

$$f'(x)=\frac{(x-1)-x}{(x-1)^2}+\left(\frac{-1}{(x-1)^2}\right)e^{\frac{1}{x-1}}=\frac{-1}{(x-1)^2}\times\left(1+e^{\frac{1}{x-1}}\right)<0 .$$

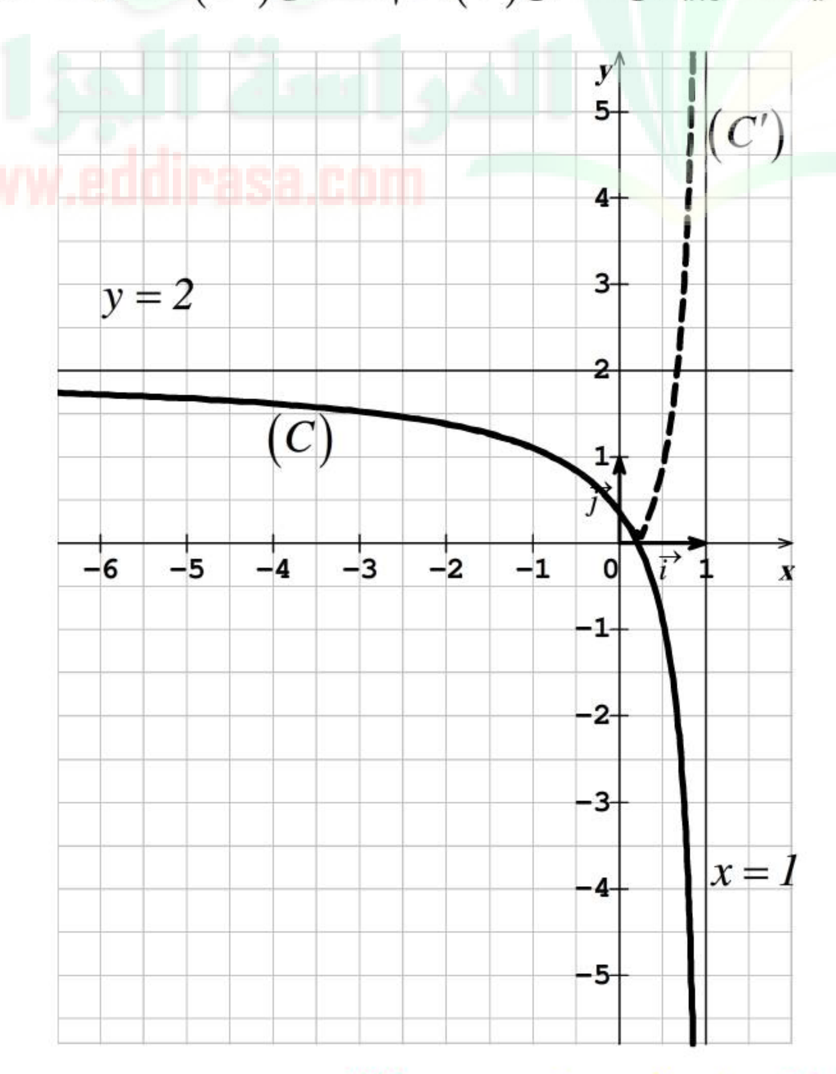
ومنه f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;1[$ ،

جدول التغيرات:

x	$-\infty$	1
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	2 ↘	$-\infty$

3 . الدلة f مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $]-\infty;1[$ ،ولدينا $\lim_{x\to-\infty} f(x)=2>0$ و $\lim_{\substack{x\to1\\<}} f(x)=-\infty$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل في $]-\infty;1[$ حلا وحيدا α . باستعمال جدول القيم أعلاه نجد حصرا للعدد α : $0,21\leq\alpha\leq0,22$.

4 . رسم المستقيمين المقاربين والمنحنى (C) ، ثم المنحنى (C') الممثل للدالة $|f|$:



5 . بيانيا ، حلول المعادلة $|f(x)| = m$ هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C') مع المستقيم الذي معادلته $y = m$. وحتى يكون للمعادلة حلان مختلفان في الإشارة يجب أن يكون: $m \in \left]\frac{1}{e};2\right[$.

II) g الدالة المعرفة على $]-\infty;1[$ بـ : $g(x) = f(2x-1)$.

1 . دراسة تغيرات الدالة g على $]-\infty;1[$ ، ثم تشكيل جدول تغيراتها:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} f\left(2x-1\right) = \lim_{X\to-\infty} f\left(X\right) = 2$$

$$\lim_{\substack{x\to 1 \\ <}} g(x) = \lim_{\substack{x\to 1 \\ <}} f\left(2x-1\right) = \lim_{\substack{x\to 1 \\ <}} f\left(X\right) = -\infty$$

الدالة g هي مركب الدالة التآلفية : $x \to 2x-1$ المتزايدة تماما على $]-\infty;1[$ متبوعة بالدالة f المتناقصة تماما على $]-\infty;1[$ ومنه الدالة g متناقصة تماما على $]-\infty;1[$.

جدول التغيرات:

x	$-\infty$	1
$g'(x)$	$-$	
$g(x)$	$2 \searrow$	$-\infty$

2 . ا) التحقق من أن : $g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)$ ، و أن: $g'\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = 2f'(\alpha)$

لدينا: $g(x) = f(2x-1)$ ، أي: $g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = f\left(2\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)-1\right) = f(\alpha) = 0$

ولدينا: $g'(x) = 2f'(2x-1)$ ، ومنه: $g'\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = 2f'\left(2\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)-1\right) = 2f'(\alpha)$

ب) معادلة (T) المماس لمنحنى الدالة g في النقطة ذات الفاصلة $\frac{\alpha+1}{2}$:

لدينا: $(T): y = g'\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\left(x-\frac{\alpha+1}{2}\right) + g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)$

ومنه: $(T): y = 2f'(\alpha)\left(x-\frac{\alpha+1}{2}\right)+0$ ،

أي: $(T): y = 2f'(\alpha)\left(x-\frac{\alpha+1}{2}\right)$

ومنه: $(T): y=\frac{-2}{(\alpha-1)^2}\left(1+e^{\frac{1}{\alpha-1}}\right)x+\frac{(\alpha+1)}{(\alpha-1)^2}\left(1+e^{\frac{1}{\alpha-1}}\right)$

ج) التحقق من أن: $y=\frac{2}{(\alpha-1)^3}x-\frac{\alpha+1}{(\alpha-1)^3}$ معادلة للمستقيم (T)

لدينا: $f(\alpha)=0$ معناه: $\frac{\alpha}{\alpha-1}+e^{\frac{1}{\alpha-1}}=0$، أي: $e^{\frac{1}{\alpha-1}}=-\frac{\alpha}{\alpha-1}$

ومنه: $(T): y=\frac{-2}{(\alpha-1)^2}\left(1-\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)x+\frac{(\alpha+1)}{(\alpha-1)^2}\left(1-\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)$

بعد التبسيط نجد: $y=\frac{2}{(\alpha-1)^3}x-\frac{\alpha+1}{(\alpha-1)^3}$



حل الموضوع الثاني

التمرين الأول :

1 . بالتعويض في المعادلة (E) نجد:

$$(-2-3i)^2+4(-2-3i)+13=4+12i-9-8-12i+13=-13+13=0$$

ومنه العدد $-2-3i$ هو حل للمعادلة (E) ،ويكون الحل الآخر مرافقه أي: $-2+3i$.

2 . أ – اثبات أن: $z'=\frac{1}{2}iz-\frac{7}{2}-2i$.

العبارة المركبة لـ S التشابه المباشر الذي مركزه A ، نسبته $\frac{1}{2}$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$ و الذي يحول كل نقطة $M(z)$ من المستوي إلى النقطة $M'(z')$ هي من الشكل : $z'=az+b$ ، حيث:

$a=\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}i$ و $b=(1-a)z_A=\left(1-\frac{1}{2}i\right)(-2-3i)=-\frac{7}{2}-2i$

ومنه: $z'=\frac{1}{2}iz-\frac{7}{2}-2i$

ب – حساب z_C لاحقة النقطة C ، علما أن C هي صورة B بالتشابه S .

$C=S(B)$ معناه: $z_C=\frac{1}{2}iz_B-\frac{7}{2}-2i=\frac{1}{2}i(i)-\frac{7}{2}-2i=-4-2i$

أي: $z_C=-4-2i$.

3 . أ – النقطة D تحقق $2\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ ، ومنه $2\overrightarrow{AD}+\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}\right)=\vec{0}$

ومنه: $3\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{DB}=\vec{0}$.

أي D هي مرجح النقطتين A و B المرفقتين بالمعاملين 3 و -1 على الترتيب .

ب – لدينا: $z_D=\frac{3\times z_A+(-1)\times z_B}{3+(-1)}=-3-5i$ ، إذن: $z_D=-3-5i$.

جـ- اثبات أن: $\frac{z_D-z_A}{z_C-z_A}=i$ ثم تحديد طبيعة المثلث ACD

لدينا: $\frac{z_D-z_A}{z_C-z_A}=\frac{(-3-5i)-(-2-3i)}{(-4-2i)-(-2-3i)}=\frac{-1-2i}{-2+i}=\frac{i(-2+i)}{-2+i}=i$

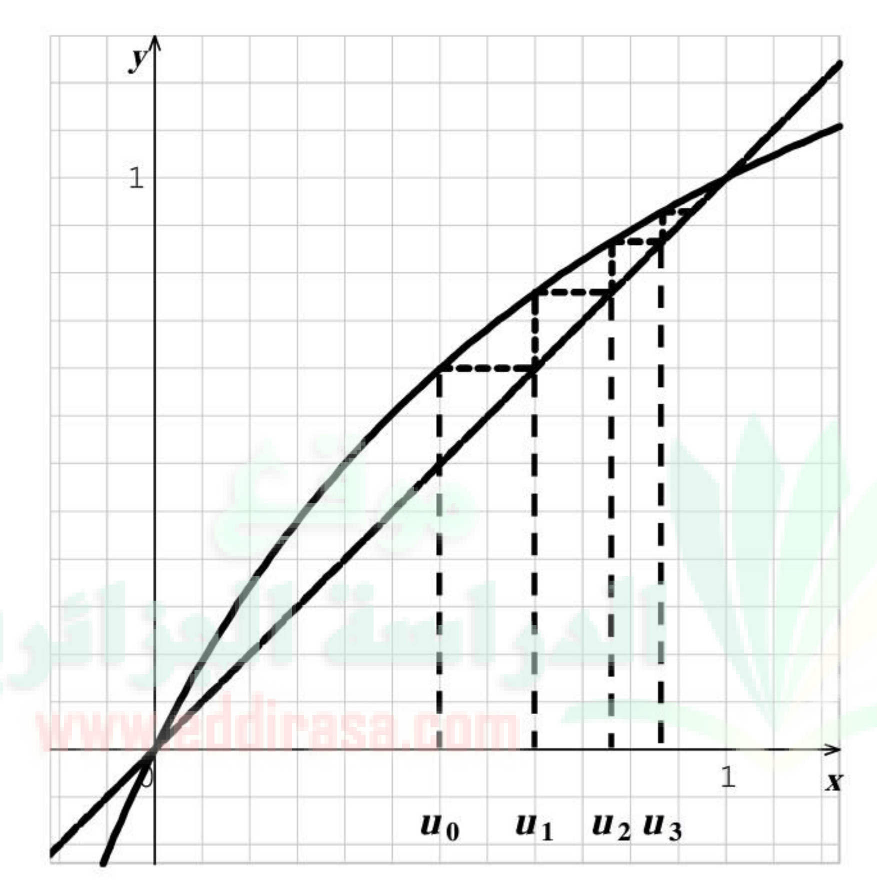
بما أن: $\frac{z_D - z_A}{z_C - z_A} = i$ فإن:

$$\begin{cases} \left|\frac{z_D - z_A}{z_C - z_A}\right| = |i| = 1 \\ arg\left(\frac{z_D - z_A}{z_C - z_A}\right) = arg(i) = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

أي: $\begin{cases} AD = AC \\ (AD) \perp (AC) \end{cases}$ ، ومنه المثلث ACD قائم و متساوي الساقين في A .

التمرين الثاني:

1. أ) الرسم :



ب) التخمين : المتتالية (u_n) متزايدة تماما و متقاربة نحو العدد 1 .

2 . أ) ثبات أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;1]$:

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $[0;1]$ و لدينا:

$$f'(x) = \frac{2\times 1 - 1\times 0}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2} > 0$$

ب) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 1$.

نضع: $p(n)$ ، من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 1$.

* المرحلة 1: من أجل $n = 0$ لدينا $P(0)$: $0 < u_0 < 1$ ، أي: $0 < \frac{1}{2} < 1$ محققة.

* المرحلة 2: نفرض صحة $p(n)$ أي : $0 < u_n < 1$ ونبرهن صحة $p(n+1)$ أي :

. $0 < u_{n+1} < 1$

لدينا : $0 < u_n < 1$ وبما أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;1]$

فإن $f(0) < f(u_n) < f(1)$ ، أي: $0 < u_{n+1} < 1$

* الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 1$.

جـ) اتجاه تغير المتتالية (u_n) :

لدينا: $u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n}{u_n+1} - u_n = \frac{-u_n(u_n-1)}{u_n+1}$ ، وبما أن: $0 < u_n < 1$ فإن:

$u_{n+1} - u_n > 0$ ، ومنه (u_n) متزايدة تماما .

3 . (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n}$.

أ – اثبات أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ، يطلب حساب حدها الأول v_0 .

لدينا: $v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}} = \frac{\left(\frac{2u_n}{u_n+1}\right)-1}{\left(\frac{2u_n}{u_n+1}\right)} = \frac{u_n-1}{2u_n} = \frac{1}{2}\left(\frac{u_n-1}{u_n}\right) = \frac{1}{2}v_n$.

ومنه: (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ، حدها الأول -1 : $v_0 = \frac{u_0-1}{u_0} = \frac{\frac{1}{2}-1}{\frac{1}{2}} = -1$.

ب – حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

لدينا: $v_n = \frac{u_n-1}{u_n}$ ومنه: $u_n v_n = u_n - 1$ ، ومنه $u_n(v_n-1) = -1$ ، ومنه: $u_n = \frac{-1}{v_n-1}$

ومنه: $u_n = \frac{-1}{v_0 \times q^n - 1} = u_n = \frac{-1}{-1\times\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1}$

إذن: $u_n = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^n+1}$ ومنه: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^n+1} = 1$ ، لأن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

التمرين الثالث :

1 . أ) I منتصف $[AB]$ ومنه: $I\left(\frac{2+1}{2};\frac{1-1}{2};\frac{3-1}{2}\right)$ ، أي: $I\left(\frac{3}{2};0;1\right)$.

ب) اثبات أن : $2x+4y-8z+5=0$ معادلة ديكارتية لـ (P) ،المستوي المحوري لـ $[AB]$.

- I منتصف $[AB]$ تنتمي إلى (P) لأن: $2\left(\frac{3}{2}\right)+4(y)-8(1)+5=-5+5=0$

- ولدينا $\overrightarrow{AB}(-1;-2;4)$ و $\overrightarrow{n_{(P)}}(2;4;-8)$ مرتبطين خطيا لأن: $\frac{-1}{2}=\frac{-2}{4}=\frac{4}{-8}$

2 . لدينا $C\in(\Delta)$ و $\vec{u}(1;2;-4)$ شعاع توجيه لـ (Δ) ومنه:

$$(\Delta):\begin{cases}x=-\frac{3}{2}+t\\ y=-2+2t \quad ,t\in\mathbb{R}\\ z=1-4t\end{cases}.$$

3 . أ) احداثيات E نقطة تقاطع المستوي (P) والمستقيم (Δ) :

$$(\Delta)\cap(P):\begin{cases}x=-\frac{3}{2}+t\\ y=-2+2t\\ z=1-4t\\ 2x+4y-8z+5=0\end{cases}$$

ومنه: $2\left(-\frac{3}{2}+t\right)+4(-2+2t)-8(1-4t)+5=0$ تعني: $t=\frac{1}{3}$ ، بالتعويض في

التمثيل الوسيطي نجد: $E\left(-\frac{7}{6};-\frac{4}{3};-\frac{1}{3}\right)$

ب) اثبات أن (Δ) و (AB) من نفس المستوي:

لدينا $\vec{u}(1;2;-4)$ شعاع توجيه لـ (Δ) و $\overrightarrow{AB}(-1;-2;4)$ شعاع توجيه لـ (AB) مرتبطان

خطيا لأن $\vec{u}=-\overrightarrow{AB}$ ومنه (Δ) و (AB) متوازيان أي من نفس المستوي.

ولدينا: $\begin{cases}(AB)\perp(P)\\ (\Delta)//(AB)\end{cases}$ إذن: $\begin{cases}(EC)\perp(P)\\ E\in(P)\end{cases}$ ومنه المثلث IEC قائم في E .

4. أ)اثبات أن المستقيم (ID) عمودي على كل من المستقيم (AB) و المستقيم (IE) :

لدينا:
$$\begin{cases} \overrightarrow{ID}.\overrightarrow{AB}=(2)(-1)+(-3)(-2)+(-1)(4)=4-4=0 \\ \overrightarrow{ID}.\overrightarrow{IE}=(2)\left(-\frac{8}{3}\right)+(-3)\left(-\frac{4}{3}\right)+(-1)\left(-\frac{4}{3}\right)=-\frac{4}{3}+\frac{4}{3}=0 \end{cases}$$

ومنه: $\begin{cases} \overrightarrow{ID}\perp\overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{ID}\perp\overrightarrow{IE} \end{cases}$.

ب) حساب حجم رباعي الوجوه $DIEC$:

$$V=\frac{1}{3}\times S_{IEC}\times h=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times IE\times EC\right)\times ID=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{4\sqrt{6}}{3}\times\frac{\sqrt{21}}{3}\right)\times\sqrt{14}=\frac{84}{9}$$

اذن: $V=\frac{84}{9}\ uv$.

التمرين الرابع :

I) g الدالة المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $g(x)=x^2+2x+4-2\ln(x+1)$.

1. دراسة تغيرات الدالة g ، وتشكل جدول تغيراتها :

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1} g(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1}\left[x^2+2x+4-2\ln(x+1)\right]=+\infty$ ،

لأن : $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1}\ln(x+1)=-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}(x+1)\left[\frac{x^2+2x+4}{x+1}-2\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right]=+\infty$$

لأن: $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x+4}{x+1}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)}{x+1}=0$

- الدالة g قابلة للاشتقاق على المجال $]-1;+\infty[$ ولدينا: $g'(x)=\frac{2x(x+2)}{x+1}$

إشارة $g'(x)$ من إشارة x لأن على المجال $]-1;+\infty[$: $x+1>0$ و $x+2>0$

x	-1		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	

- الدالة g متناقصة تماما على المجال $]-1;0]$

- الدالة g متزايدة تماما تماما على المجال $[0;+\infty[$

جدول التغيرات:

x	-1		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	4	↗	$+\infty$

2 .من جدول التغيرات نستنتج أنه من أجل كل x من المجال $]-1;+\infty[$ ، $g(x) \geq 4 > 0$.

II) f الدالة المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $f(x) = x - \dfrac{1-2\ln(x+1)}{x+1}$

1 . أ) $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} f(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} \left(\dfrac{1}{x+1}\right)\left[x(x+1) - 1 + 2\ln(x+1)\right] = -\infty$.

ومنه يوجد مستقيم مقارب معادلته $x = -1$.

ب) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[x - \dfrac{1}{x+1} + 2\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}\right] = +\infty$.

2 . أ) اثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1;+\infty[$ فإن: $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(x+1)^2}$.

$$f'(x) = 1 - \frac{\left(\frac{-2}{x+1}\right)(x+1) - \left(1 - 2\ln(x+1)\right)}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{x^2 + 2x + 4 - 2\ln(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$$

ب) بما أن $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(x+1)^2}$ فإن إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ ، ومنه f متزايدة تماما

على $]-1;+\infty[$

جدول التغيرات:

x	-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

جـ) من جدول التغيرات الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما ولكون $]0;0,5[\subset]-1;+\infty[$

و $f(0) = -1 < 0$ و $f(0,5) = 0,37 > 0$ فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة

المعادلة $f(x)=0$ تقبل تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-1;+\infty[$ ، بحيث $0<\alpha<0,5$.

3. أ)

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-y\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{1-2\ln(x+1)}{x+1}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{1}{x+1}+\frac{2\ln(x+1)}{x+1}\right]=0$$

ومنه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

ب) وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (Δ):

$$f(x)-y=-\frac{1-2\ln(x+1)}{x+1}=\frac{2\ln(x+1)-1}{x+1}$$

إشارة الفرق من إشارة $2\ln(x+1)-1$ ، لدينا:

$2\ln(x+1)-1=0$ تعني $\ln(x+1)=\frac{1}{2}$ ، ومنه: $x+1=e^{\frac{1}{2}}$ ، أي $x=e^{\frac{1}{2}}-1$

أي: $x=\sqrt{e}-1$ نجد هكذا:

x	-1		$\sqrt{e}-1$		$+\infty$
$f(x)-y$		$-$	0	$+$	

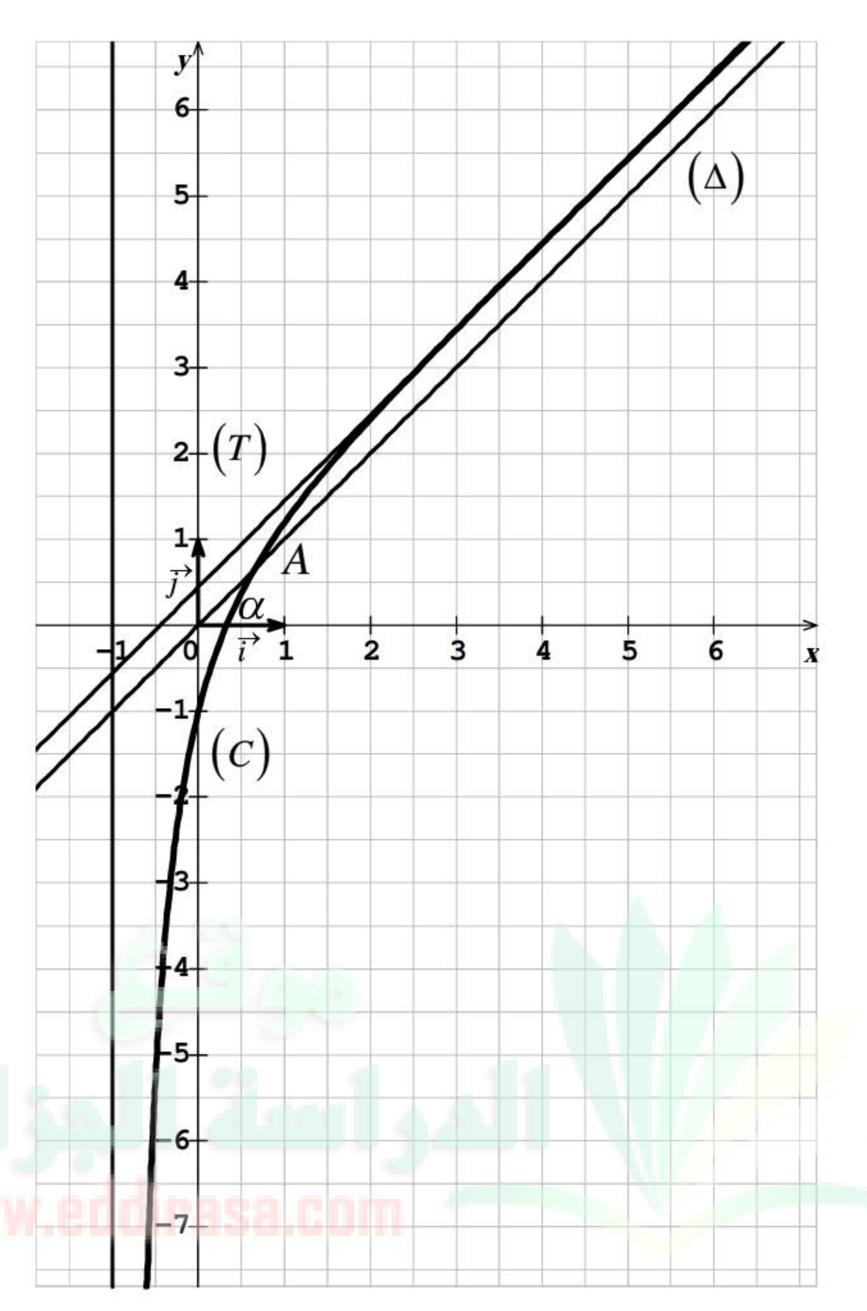
- المنحنى (C_f) تحت المستقيم (Δ) في المجال $]-1;\sqrt{e}-1[$.
- المنحنى (C_f) فوق المستقيم (Δ) في المجال $]\sqrt{e}-1;+\infty[$.
- المنحنى (C_f) يقطع المستقيم (Δ) في النقطة ذات الاحداثيين $A\left(\sqrt{e}-1;\sqrt{e}-1\right)$.

4. $(T): y=x+\frac{2}{\sqrt{e^3}}$

أ) حساب x_0 : لدينا: $f'(x_0)=1$ أي $\frac{g(x_0)}{(x_0+1)^2}=1$ ، بعد التبسيط نجد :

$2\ln(x_0+1)=3$ ، أي $x_0+1=e^{\frac{3}{2}}$ ، أي: $x_0=e^{\frac{3}{2}}-1$ ، ومنه: $x_0=\sqrt{e^3}-1$.

ب) رسم المستقيمين المقاربين و المماس (T) ثم المنحنى (C_f) :



ج) بيانيا ،حلول المعادلة $f(x) = x + m$ هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم الذي معادلته $y = x + m$ الموازي لكل من المستقيمين (Δ) و (T) .

إذن المعادلة تقبل حلين متمايزين عندما يكون $0 < m < \frac{2}{\sqrt{e^3}}$ أي $m \in \left]0; \frac{2}{\sqrt{e^3}}\right[$.